

Раздел III. Колебания и волны.

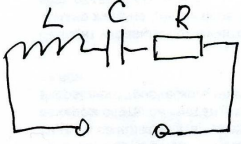
Глава 3. Вынужденные колебания.

1. Примеры вынужденных колебаний.

а) Грузик на пружинке

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$
$$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}_{2\beta} \dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\left(\frac{F_0}{m}\right)}_{f_0} \cos \Omega t$$

б) Электрический колебательный контур



$$\sim U(t) = U_0 \cos \Omega t$$

$$IR + \frac{Q}{C} = -L \frac{dI}{dt} + U_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{Q} + \underbrace{\left(\frac{R}{L}\right)}_{2\beta} \dot{Q} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} Q = \underbrace{\left(\frac{U_0}{L}\right)}_{f_0} \cos \Omega t$$

2. Математическое описание вынужденных колебаний.

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания в общем виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

f_0 - амплитуда вынуждающей силы

Ω - частота вынуждающей силы

Решение имеет вид:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + x_m \cos(\Omega t + \psi)$$

Первое слагаемое описывает затухающие колебания, с течением времени они исчезают. Второе слагаемое описывает вынужденные колебания:

$$x_e(t) = x_m \cos(\Omega t + \psi)$$

Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы Ω . Амплитуда вынужденных колебаний равна:

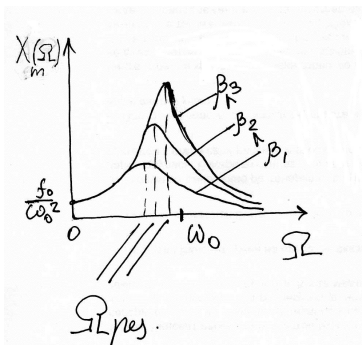
$$x_m = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

Сдвиг фаз между вынуждающей силой и вынужденными колебаниями ψ равен:

$$\psi = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

3. Явление резонанса – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынужденной силы к резонансной:

$$\Omega_{рез}^{x,q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

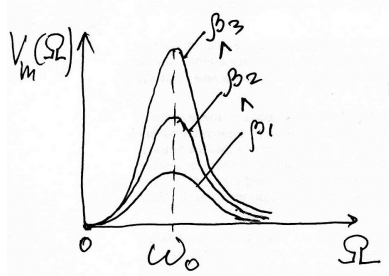


4. Явление резонанса для скорости вынужденных колебаний (силы тока в электрическом колебательном контуре).

$$V_{\epsilon}(t) = \frac{dx_{\epsilon}}{dt} = -x_m \Omega \sin(\Omega t + \psi) = x_m \Omega \cos(\Omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$$

$$V_{\epsilon}(t) = V_m \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$V_m = x_m \Omega; \quad \varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$



$$\Omega_{рез}^{V,I} = \omega_0$$

Вопросы.

1. Дифференциальное уравнение и решение для вынужденных колебаний.
2. График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.
3. Что такое резонанс.
4. Отличие резонанса заряда и тока в электрическом колебательном контуре.